Euler-ova jednačina za stacionarno tečenje

Polazimo od integralnog oblika kvazi-1D Eulerove jednadžbe za polje sile teže:

$$\frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + gz + \int \frac{\partial v}{\partial t} ds = konst.$$

kod stacionarnog tečenja zadnji član lijeve strane isčezava, pa nam ostaje

$$\frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + gz = konst.$$

Bernoulli-ova jednačina 1

ako zanemarivo promjene pritiska, Euler-ovu jednačinu za stacionarno strujanje možemo integrirati pa dobijemo:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = konst.$$

Ovo je Bernoulli-jeva jednačina za nestišljiv fluid. Analizirajmo dimenzije pojedinih članova na lijevoj strani:

$$\frac{v^2}{2} \rightarrow \mathrm{m}^2\mathrm{s}^{-2} = \mathrm{m}^2\mathrm{s}^{-2}\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{kg}} = \frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{kg}} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}$$

Bernoulli-ova jednačina 2

$\frac{p}{\rho}$ → $\frac{\mathrm{Pa}}{\mathrm{kgm}^{-3}} = \frac{\mathrm{Nm}^{-2}}{\mathrm{kgm}^{-3}} = \frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{kg}} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}$

gz → $\mathrm{m}^2\mathrm{s}^{-2} = \mathrm{m}^2\mathrm{s}^{-2}\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{kg}} = \frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{kg}} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}$

uz $\mathrm{N} = \mathrm{kgms}^{-2}$

svi članovi predstavljaju energiju po jedinici mase!

Konstanta na desnoj strani je **ukupna energija fluida.**

Bernoulli-ova jednačina 3

$\frac{v^2}{2}$ predstavlja kinetičku energiju fluida

$\frac{p}{\rho}$ predstavlja unutrašnju energiju fluida (zbog pritiska)

gz predstavlja potencijalnu energiju fluida

B.J. je u stvari zakon očuvanja energije za tečnosti!

Bernoulli-jeva jednačina za tečnosti

B.J. za nestisljivi fluid podijelimo sa g:

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z = z_\circ$$

svi članovi sad imaju dimenzije dužine i nazivaju se visine:

brzinska v. + v. pritiska + geodetska v. = v. energetskog horizonta (energetske linije)

v. pritiska + geodetska v. = pijezometarska v.!

Bernoulli-jeva jednačina za tečnosti

energetski karakter je skriven. Možemo probati ovako:

$$\mathrm{m} = \mathrm{m}\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{N}} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{G}_\circ} \qquad \mathrm{G}_\circ = \mathrm{g} \cdot 1\,\mathrm{kg}$$

ovo je energija po težini jedinične mase (1 kg)!

ovaj oblik najčešće se koristi jer se pijezometarska visina može direktno mjeriti!

Bernoulli-jeva jednačina za tečnosti 3

kako je gustina konstantna (početna pretpostavka!) i z_o konstanta, možemo pisati

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2$$

gdje su 1 i 2 bilo koje dvije tačke na strujnici.

Tu je problem: B.J. važi za jednu strujnicu!
Praksa: "ignorišemo" problem i u B.J. uvrštavamo srednje vrijednosti odgovarajućih veličina!

Bernoulli-jeva jednačina za tečnosti 4

najveću grešku unosi srednja vrijednost brzine (pritisak i visina se sporije mijenjaju). Probajmo ocijeniti tu grešku. Polazimo od toka kinetičke energije kroz strujnu cijev:

$$\frac{dE_k}{dt} = \frac{dm}{dt}\frac{v^2}{2}$$

protok mase je dat sa

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\rho dV}{dt} = \frac{\rho dAv}{dt}$$

Bernoulli-jeva jednačina za tečnosti 5

odnosno

$$\frac{dE_k}{dt} = \frac{\rho}{2} v^3 dA$$

za cijeli presjek toka, to moramo integraliti po površini presjeka:

$$\frac{d}{dt}(E_k) = \frac{\rho}{2} \int_A v^3 dA$$

Bernoulli-jeva jednačina za tečnosti 6

račun sa srednjom vrijednošću brzine da je

$$\frac{d}{dt}(\bar{E}_k) = \frac{\rho}{2} \bar{v}^3 A$$

matematički se može dokazati da uvijek važi:

$$\int_A v^3 dA > \bar{v}^3 A$$

Corioliss-ov koeficijent

odnos

$$\delta = \frac{\int_A v^3 dA}{\bar{v}^3 A} > 1$$

naziva se Coriollis-ov koeficijent.

Da izbjegnemo greške zbog usrednjavanja, moramo modifikovati B.J:

$$\delta \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z = z_\circ$$

Corioliss-ov koeficijent 2

odnosno

$$\delta_1 \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \delta_2 \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2$$

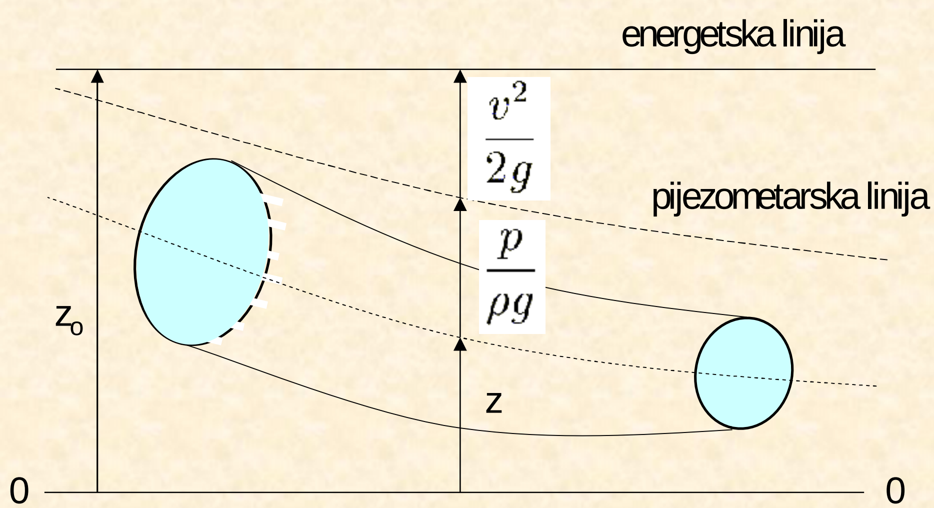
Coriollis-ov koeficijent u realnim situacijama moramo odrediti iz poznatih podataka o toku na mjestu za koje taj koeficijent tražimo!

Statička granica Bernoulli-jeve jednačine

ako se strujanje zaustavi, B.J. prelazi u jednačinu hidrostatičke ravnoteže:

$$p = \rho g(z_\circ - z)$$

Korišćenje Bernoulli-jeve jednačine



visina energetske linije z_o je konstantna (idealna tečnost!).
Za nju se često puta koriste i oznake h ili H.

z_o se mjeri od zgodno odabrane referentne ravni (0--0)
koja obično odgovara najnižoj tački problema. Za nju je z=0.

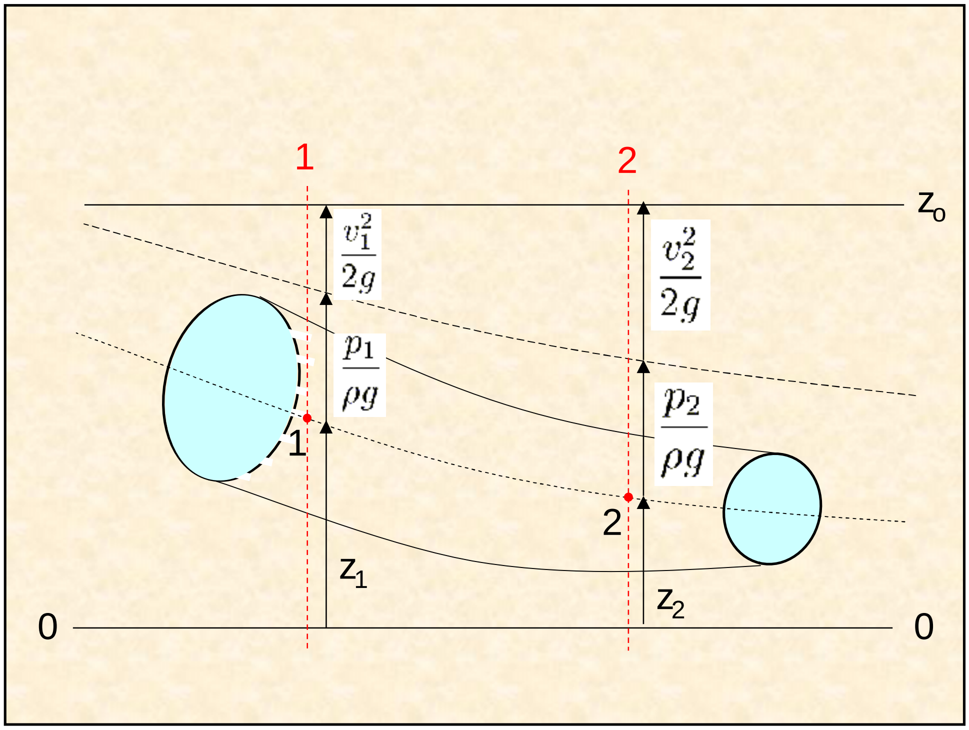
Često puta se kao referentna ravan uzima morska površina

$\frac{v^2}{2g}$ predstavlja kinetičku energiju tečnosti (brzinska visina)

$\frac{p}{\rho g}$ je doprinos pritiska potencijalnoj energiji tečnosti (visina pritiska)

z je dio potencijalne energije tečnosti zbog njenog položaja (geodetska visina)

pijezometarska visina= v. pritiska + geodetska visina



$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2$$

Bernoulli-jeva jednačine za realne fluide

idelani fluidi ne opisuju dobro realne situacije. Svi realni fluidi imaju neku viskoznost i nju moramo uzeti u obzir.

Viskozna sila dana je proizvodom tangencijalnog naprezanja i tangencijalne površine:

$$F_{vis} = \tau A$$

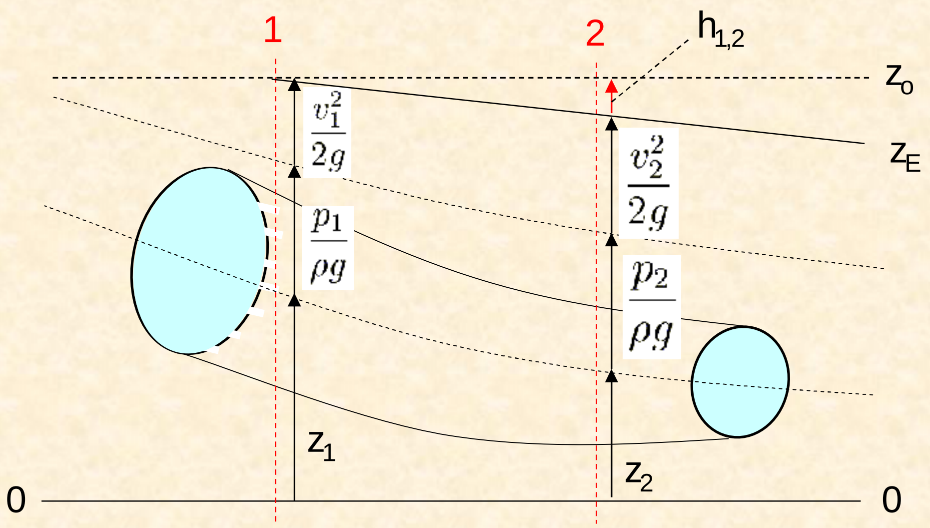
kod čestice fluida viskozna sila djeluje na njene bočne strane:

$A = Ods$ pa je $dF_{vis} = \tau O ds$

zbog toga moramo B.J. dodati član koji opisuje energiju potrošenu viskoznim trenjem. On je jednak promjeni “pritiska" po jedinici mase fluida (kao i postojeći član dp/ρ):

$$h_{vis} = \frac{dF_{vis}}{\rho dA}$$

viskozno trenje kao i svako drugo trenje troši mehaničku energiju pretvarajući ju u toplotu, pa se ona za nas gubi. Posedica toga je da ukupna energija realnog fluida nije sačuvana, već se gubi u smjeru tečenja.



$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + h_{1,2}$$

član $h_{1,2}$ opisuje gubitak energije viskoznog fluida između tačaka 1 i 2 zbog unutrašnjeg trenja u fluidu.

Određivanje gubitaka

1. ako je proticaj konstantan (=stacionarno strujanje!) na mjestima 1 i 2 izmjerimo pijezometarsku visinu h_p:

$$h_p = \left(z + \frac{p}{\rho g}\right)$$

2. pomoću jednačine kontinuiteta nađemo brzine ($v_1A_1=v_2A_2=Q$)
3. pomoću B.J. nađemo gubitak:

$$h_{1,2} = \left(\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1\right) - \left(\frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2\right)$$

odnosno, uz upotrebu pijezometarske visine:

$$h_{1,2} = \left(\frac{v_1^2}{2g} + h_{p1}\right) - \left(\frac{v_2^2}{2g} + h_{p2}\right)$$

ako se tečenje odvija kroz cijev konstantnog presjeka, brzina je svugdje ista pa imamo još jednostavniju formulu:

$$h_{1,2} = h_{p1} - h_{p2}$$

gubitak energije po jedinici dužine toka naziva se **energetski gradijent** ili **energetski pad:**

$$I_e = \frac{h_{1,2}}{l}$$

pad pijezometarske linije po jedinici dužine toka naziva se **pijezometarski gradijent (pad)** ili **hidraulički gradijent:**

$$I_p = \frac{h_{p1} - h_{p2}}{l} = \tan \alpha$$

kod otvorenog toka postoji slobodna površina i na njoj je pritisak svugde jednak atmosferskom:

$$p_1 = p_2 = p_a$$

površina fluida je jednaka pijezometarskoj liniji, a B.J. postaje :

$$\frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + h_{1,2}$$

ako je tečenje jednoliko, ovo se još pojednostavi:

$$h_{1,2} = z_1 - z_2$$

da bi tečenje bilo jednoliko (v1=v2) i presjek toka (dubina i širina) mora biti konstantan. U takvom slučaju koristi se i pojam topografskog gradijenta *i* koji predstavlja nagib dna korita u kojem se tok odvija, jer je slobodna površina paralelna sa dnom.